Il moto irrotazionale

In un moto irrotazionale $\underline{\omega} = \underline{0}$. Se la densità è costante l'equazione di continuità porge $\nabla \cdot \underline{v} = 0$. Il termine seguente, contenuto nell'equazione di moto, si annulla ($\nabla \times \underline{v} = \underline{\omega} = \underline{0}$):

$$\nabla^2 \underline{v} = \nabla(\nabla \cdot \underline{v}) - \nabla \times (\nabla \times \underline{v}) = 0 \Rightarrow \rho \frac{d\underline{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \underline{f} + \underbrace{\cancel{\mu \nabla^2 \underline{v}}}_{=0} = -\nabla p + \rho \underline{f}$$

Si ottiene l'equazione di Eulero. Il moto può tuttavia non essere ideale: è la vorticità nulla, non la viscosità. La prima causa l'annullamento di $\nabla^2 \underline{v}$ insieme alla continuità con ρ costante.

Ad alti numeri di Reynolds la vorticità è confinata in sottili strati e viene considerata nulla. Svolgendo gli stessi passaggi affrontati per il fluido ideale (con campo conservativo) si ottiene:

$$(\underline{v} \cdot \nabla)\underline{v} = \nabla\left(\frac{\underline{v} \cdot \underline{v}}{2}\right) - \underline{v} \times \underline{\omega} \Rightarrow \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{\underline{v} \cdot \underline{v}}{2}\right) - \underbrace{\cancel{\underline{v} \times \underline{\omega}}}_{=0} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \underline{f}$$

In questo caso non assumiamo moto stazionario ma introduciamo anche un potenziale della velocità ϕ oltre a quello della forza φ:

$$\nabla\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \varphi\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \varphi = F(t)$$

Con $F(t)$ arbitraria e in realtà di scarsa importanza poiché:

$$\tilde{\phi} = \phi - \int F \, dt \Rightarrow \nabla \tilde{\phi} = \nabla \phi \Rightarrow \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \varphi = \text{costante}$$

Ricavando p da questa espressione del teorema di Bernoulli si determina la forza esercitata dal fluido (incomprimibile e in moto irrotazionale) su un corpo di volume V e superficie S:

$$\underline{F} = \int_S \underline{t} \, dS = \int_S \mathbb{T} \cdot \underline{n} \, dS = \int_S -p \, \underline{n} \, dS$$

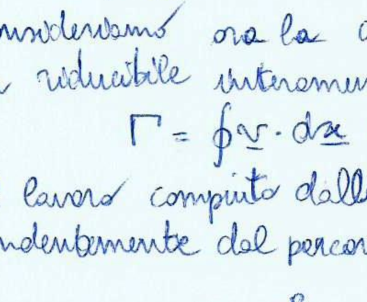
Identica a quella che si otterrebbe con fluido ideale, infatti:

$$2\mu \int_S \mathbb{D} \cdot \underline{n} \, dS = 2\mu \int_V \nabla \cdot \mathbb{D} \, dV = 0 \quad \text{poiché} \quad \nabla \cdot \mathbb{D} = \nabla^2 \underline{v} = 0$$

Consideriamo ora la circolazione, che è nulla lungo una qualsiasi linea chiusa riducibile interamente compresa nel campo di moto:

$$\Gamma = \oint \underline{v} \cdot d\underline{x} = 0, \quad \oint \underline{v} \cdot d\underline{x} = \int_S (\nabla \times \underline{v}) \cdot \underline{n} \, dS = \int_S \underline{\omega} \cdot \underline{n} \, dS = 0$$

Il lavoro compiuto dalle forze del campo è lo stesso tra due punti o e p, indipendentemente dal percorso seguito:



$$L_\alpha = L_\beta \qquad \int_\alpha \underline{v} \cdot d\underline{x} = \int_\beta \underline{v} \cdot d\underline{x}$$

Si può pertanto definire il potenziale della velocità già usato per il teorema di Bernoulli:

$$\phi(\underline{x}) = \phi(\underline{x}_0) + \int_o^p \underline{v} \cdot d\underline{x} \Rightarrow \underline{v} = \nabla \phi$$

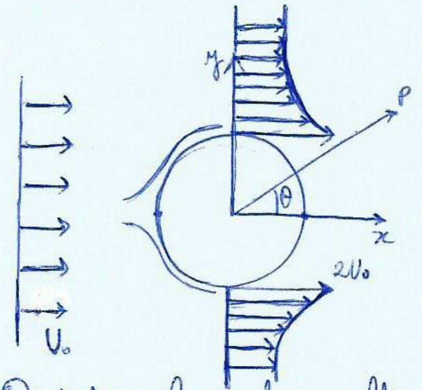
Essendo $\nabla \cdot \underline{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0$ si ottiene, ricorrendo al potenziale appena definito:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} = 0$$

Ovvero ϕ è armonica.

<u>Cilindro a sezione circolare immerso in un fluido in assenza di circolazione</u>

Consideriamo un cilindro a sezione circolare di raggio r_0. La traslazione del cilindro (o il movimento del fluido attorno ad esso a velocità U_0) genera un moto irrotazionale. Ipotizziamo che la circolazione sia nulla:



Introduciamo le coordinate cilindriche:

$$\underline{v} = \nabla\phi = (v_r, v_\theta) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}, \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)$$

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}$$

Essendo armonica la soluzione è:

$$\phi = \sum_{n=1}^{N}\left[a_n(r)\cdot\cos(n\theta) + b_n(r)\,\text{sen}(n\theta)\right]$$

Derivando due volte per ottenere $\nabla^2\phi = 0$:

$$\sum_{n=1}^{N}\left[\left(\frac{d^2a_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{da_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2}a_n\right)\cos(n\theta) + \left(\frac{d^2b_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{db_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2}\cdot b_n\right)\text{sen}(n\theta)\right] = 0$$

Moltiplichiamo l'equazione per $\text{sen}(m\theta)$ e integriamo tra 0 e 2π. Notiamo che gli integrali $\int_0^{2\pi}\text{sen}(n\theta)\cdot\text{sen}(m\theta)\,d\theta$ e $\int_0^{2\pi}\cos(n\theta)\cdot\text{sen}(m\theta)\,d\theta$ sono sempre nulli se $n \neq m$. Rimane solo la soluzione per $n=1$ con solo il coseno.

Consideriamo le condizioni al contorno:

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = 0 \quad \text{per } r = r_0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) \to U_0(\cos\theta, -\text{sen}\theta) \quad \text{per } r \to \infty$$

Abbiamo quindi:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2a_1}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{da_1}{dr} - \dfrac{1}{r^2}\cdot a_1 = 0 \\ \left.\dfrac{da_1}{dr}\right|_{r=r_0} = 0 \\ \lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{da_1}{dr} = U_0 \\ \lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{a_1}{r} = U_0 \end{cases}$$

La soluzione dell'equazione differenziale è:

$$a_1(r) = c_1 r + \frac{c_2}{r} \Rightarrow \frac{da_1}{dr} = c_1 - \frac{c_2}{r^2}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{da_1}{dr}\right|_{r\to\infty} = \left.c_1 - \frac{c_2}{r^2}\right|_{r\to\infty} = c_1 = U_0$$

$$\Rightarrow U_0 - \frac{c_2}{r^2} = 0 \Rightarrow \left.\frac{da_1}{dr}\right|_{r=r_0} = U_0 - \frac{c_2}{r_0^2} = 0$$

$$\Rightarrow c_2 = U_0\cdot r_0^2 \Rightarrow a_1(r) = U_0 r + U_0\frac{r_0^2}{r}$$

La soluzione è dunque:

$$\phi = a_1(r)\cos\theta = U_0 r\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

Si ottengono:

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = U_0\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)\cos\theta \qquad v_\theta = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -U_0\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right)\text{sen}\theta$$

La velocità normale v_r si annulla per $r = r_0$, cioè sulla superficie del cilindro, quella tangenziale sulla superficie è $v_\theta(r=r_0) = -2U_0\,\text{sen}\theta$. Ci sono quindi due punti di ristagno ($v_\theta = 0$ per $\theta = 0, \pi$) e due punti in cui v_θ è massima ($v_\theta = 2U_0$ per $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$). Possiamo calcolare infine la differenza di pressione tra due punti:

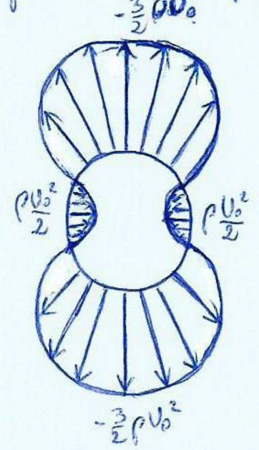
$$\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{U_0^2}{2g} = \text{cost} \Rightarrow p - p_0 = \gamma/2g\,(U_0^2 - v^2) = \frac{\rho}{2}(U_0^2 - v^2)$$

Con v_r e v_θ calcolati per $r = r_0$:

$$p - p_0 = \frac{\rho}{2}(U_0^2 - 4U_0^2\,\text{sen}^2\theta) = \rho\frac{U_0^2}{2}(1 - 4\,\text{sen}^2\theta)$$

Resistenza e portanza - il paradosso di d'Alembert

Disegniamo il profilo di pressione attorno al cilindro:



$$p-p_0=\frac{\rho U_0^2}{2}\left(1-4\,\text{sen}^2\theta\right)$$

- ·) per $\theta=0,\pi \Rightarrow p-p_0=\frac{\rho U_0^2}{2}$
- ··) per $\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi \Rightarrow p-p_0=-\frac{3}{2}\rho U_0^2$
- ∴) per $\theta=\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi,\frac{7}{6}\pi,\frac{11}{6}\pi \Rightarrow p-p_0=0$

Nota l'equazione analitica che fornisce la pressione possiamo facilmente ottenere le componenti della forza agente non solo in certi punti (ad esempio quelli per cui abbiamo già calcolato le pressione), ma anche per qualsiasi θ. La componente F_x della forza è detta resistenza, la componente F_y portanza:

$$F_x=\int_0^{2\pi}-\rho\frac{U_0^2}{2}\left(1-4\,\text{sen}^2\theta\right)\cdot n_x\cdot r_0\,d\theta=\int_0^{2\pi}-p\,n_x\,r_0\,d\theta=\int_0^{2\pi}-(p-p_0)\,r_0\cos\theta\,d\theta$$

$$F_y=\int_0^{2\pi}-\rho\frac{U_0^2}{2}\left(1-4\,\text{sen}^2\theta\right)\cdot n_y\cdot r_0\,d\theta=\int_0^{2\pi}-p\,n_y\,r_0\,d\theta=\int_0^{2\pi}-(p-p_0)\,r_0\,\text{sen}\theta\,d\theta$$

Infatti $d\underline{F}=\underline{t}\,dS \Rightarrow \underline{F}=\int d\underline{F}=\int\underline{t}\,dS=\int\mathbb{T}\cdot\underline{n}\,dS=\int -p\,\mathbb{I}\cdot\underline{n}\,dS$, con $\underline{n}=(\cos\theta,\text{sen}\theta)$.

I due integrali sono nulli:

$$F_x=-r_0\int_0^{2\pi}\cos\theta\,\frac{\rho U^2}{2}\left(1-4\,\text{sen}^2\theta\right)d\theta=0$$

$$F_y=-r_0\int_0^{2\pi}\text{sen}\theta\,\frac{\rho U^2}{2}\left(1-4\,\text{sen}^2\theta\right)d\theta=0$$

Si tratta infatti di funzioni sinusoidali (riconducibili per F_x a coseni e potenze di coseni ricordando che $\text{sen}^2\theta=1-\cos^2\theta$; per F_y si hanno già tutti seni) integrate in un periodo completo, ovvero tra 0 e 2π (con potenze dispari, 1 e 3).

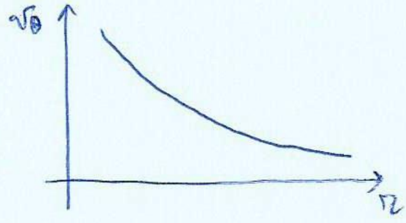
Le due equazioni esprimono il paradosso di d'Alembert: "Un corpo rigido in moto stazionario di traslazione in un fluido supposto in moto ideale irrotazionale non subisce alcuna azione da parte del fluido stesso se la circolazione Γ è nulla".

Cilindro a sezione circolare in moto stazionario con circolazione

Passiamo ora al caso in cui la circolazione non sia nulla. In questo contesto bisogna sovrapporre a $\phi = V_0 r\left(1+\frac{r_0^2}{r^2}\right)\cos\theta$ il potenziale $\bar\phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$ che porge:

$$\bar v_r = \frac{\partial \bar\phi}{\partial r} = 0 \qquad \bar v_\theta = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \bar\phi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Graficamente la $\bar v_\theta(r)$ è rappresentabile come segue:



La relazione tra v_θ e r è infatti iperbolica

Ricordiamo alcune definizioni:

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = \nabla\cdot\nabla\phi = 0$$

$$\underline{\omega} = \nabla\times\underline{v} = \underline{0}$$

$$\oint \underline{v}\cdot d\underline{x} = \int_0^{2\pi}\frac{\Gamma}{2\pi r_0}\cdot r_0\, d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{\Gamma}{2\pi}\, d\theta$$

$$\oint \underline{v}\cdot d\underline{x} = \int_S \underline{\omega}\cdot\underline{n}\, dS$$

L'equazione di Laplace è lineare, quindi qualsiasi combinazione lineare di due soluzioni ϕ_1 e ϕ_2 è ancora soluzione. Ne segue che:

$$\phi = V_0 r\left(1+\frac{r_0^2}{r^2}\right)\cos\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$

Da cui discende, per $r = r_0$:

$$v_\theta = -2V_0\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0} = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\Big|_{r=r_0}$$

La circolazione ha l'effetto di spostare i punti di ristagno verso il basso se è negativa, verso l'alto se è positiva:

$$-2V_0\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0} = 0 \iff \mathrm{sen}\,\theta = \frac{\Gamma}{4\pi r_0 V_0} \iff \theta = \mathrm{arcsen}\left(\frac{\Gamma}{4\pi r_0 V_0}\right)$$

Se $|\Gamma| > 4\pi r_0 V_0$ il punto di ristagno si sposta fuori dal cilindro e il fluido ruota attorno al cilindro stesso.

Calcoliamo la pressione (per $r = r_0$):

$$p - p_0 = \frac{\rho}{2}(V_0^2 - v^2) = \frac{\rho V_0^2}{2}\left[1-\left(-2\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0 V_0}\right)^2\right]$$

Calcoliamo quindi la resistenza F_x:

$$F_x = -\int_0^{2\pi} r_0\cos\theta\,\frac{\rho V_0^2}{2}\left[1-\left(-2\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0 V_0}\right)^2\right]d\theta = -\int_0^{2\pi} r_0\cos\theta\,\frac{\rho V_0^2}{2}\left[1-4\,\mathrm{sen}^2\theta - \left(\frac{\Gamma}{2\pi r_0 V_0}\right)^2 + \frac{2\Gamma\,\mathrm{sen}\,\theta}{\pi r_0 V_0}\right]d\theta$$

Ancora una volta questo integrale è nullo, $F_x = 0$. Passiamo alla portanza F_y:

$$F_y = -\int_0^{2\pi} r_0\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\rho V_0^2}{2}\left[1-\left(-2\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0 V_0}\right)^2\right]d\theta = -\int_0^{2\pi} r_0\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\rho V_0^2}{2}\left[1-4\,\mathrm{sen}^2\theta - \left(\frac{\Gamma}{2\pi r_0 V_0}\right)^2 +\right.$$

$$\left. + \frac{2\Gamma\,\mathrm{sen}\,\theta}{\pi r_0 V_0}\right]d\theta = -\cancel{r_0}\,\rho\frac{V_0^{\cancel{2}}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}\Gamma}{\pi \cancel{r_0}\cancel{V_0}}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = -\frac{\rho V_0 \Gamma}{\cancel{\pi}}\cdot\cancel{\pi} = -\rho V_0\Gamma$$

Valore indipendente da dimensioni, forma e orientamento del corpo purché esso sia bidimensionale. Abbiamo ottenuto il teorema di Kutta-Joukowskij: "Un corpo cilindrico che trasla a V_0 costante in un fluido a moto ideale irrotazionale caratterizzato da circolazione Γ subisce da esso un'azione di sostentamento $\rho V_0|\Gamma|$ perpendicolarmente al suo avanzamento e ruotata di 90° rispetto alla direzione del moto relativo del corpo rispetto al fluido".